ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1. Мера возможности: определение, свойства

Ю.П.Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

В серии публикаций будут изложены основы теории возможностей и ее применения для математического моделирования реальности на основе опытных фактов, знаний и гипотез исследователя. В настоящей статье рассмотрена конструкция меры возможности и исследованы ее свойства.

Введение

Теоретико-вероятностные методы широко и ус- ешно применяются в научных исследованиях для оделирования (в терминах случайности) многих спектов неясности и неопределенности, отражаю- цих неполноту и недостоверность знаний, а также ля моделирования нечеткости и неточности, отно- ящихся к содержанию знаний. В то время как не- еткость и неточность естественно ассоциируются с аспределением вероятностей, неясность и неопре- еленность отражаются в частичном незнании рас- ределения; возникающие в связи с этим проблемы ормулируются в терминах теории проверки стати- тических гипотез [1] и теории оценивания [2].

Вместе с тем теоретико-вероятностные методы казались неэффективными при моделировании ирокого класса процессов и явлений, в организа- ии которых именно неопределенность и нечет- ость в конечном счете играют решающую роль. ечь идет о моделировании сложных физических, оциальных и экономических систем, субъективных уждений и т.д. Этим объясняется повышенный ин- ерес к невероятностным моделям нечеткости и не- пределенности, характерный для 1960–1970-х гг. убъективная вероятность Севеджа [3] как мера не- веренности субъекта, суждения которого удовлет- оряют определенным условиям "рациональности"; ерхние и нижние вероятности Демпстера [4], ха- актеризующие неполноту наблюдений и отражаю- ие неопределенность в теории вероятностей, мо- елируемую многозначными отображениями; тесно вязанные с емкостью Шоке [5] правдоподобие и оверие Шефера [6] в теории принятия решений, озникшие как обобщение идей Демпстера, и, на- онец, возможность Заде [7], основанная на его тео- ии нечетких множеств [8] – вот далеко не полный еречень фундаментальных математических работ, риентированных на моделирование нечеткости и еопределенности невероятностными методами. Следует также отметить возможность Шейкла [9] в его теории принятия решений, а также возможность и правдоподобие, определенные в терминах неопределенных нечетких множеств автором настоящей статьи [10].

Теория возможностей прежде всего является естественным обобщением теории ошибок*), допускающим градации возможностей тех или иных значений ошибки. С другой стороны, теорию возможностей, позволяющую формально охарактеризовать градации модальностей типа "возможно" и "необходимо", естественно рассматривать и как модель субъективных суждений, в которой представлены в той или иной степени возможные и более или менее необходимые (достоверные) события, а также и другие атрибуты субъективных суждений, такие, например, как "некоторые", "почти все", "приблизительно", "довольно точно", "слегка" и т.д., свойственные и научному языку.

В предлагаемой работе дан эскиз теории возможностей, отличающейся от представленной в работах [7,11], и рассмотрены ее применения в задачах оценивания и принятия решений. Построение точно следует схеме теории вероятностей, позволяя проследить формальные аналогии методов теории вероятностей и теории возможностей.

За основу взята конструкция линейной счетно-аддитивной**) меры $p(\cdot)$, определенной на некотором классе $\mathscr{L}(X)$ функций и принимающей значения в заданном полукольце $\mathscr{R}$. Возможность $P(\cdot)$ определена значениями $p(\cdot)$ на классе $\{\chi_A(\cdot)\} \subset \mathscr{L}(X)$ характеристических функций измеримых подмножеств $A \subset X$ (событий). Значения $p(f(\cdot))$ на остальных функциях $f(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$ определяют возможности так называемых нечетких событий, для которых

---

*) В теории ошибок результат измерения представляется множеством возможных значений измеряемой характеристики объекта.

**) Относительно операции сложения, понимаемой как "max", и операции умножения, понимаемой как "min".

2–1124

$f(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$ являются характеристическими функциями. По аналогии со стандартной теоретико-вероятностной схемой вводятся понятия возможностного пространства, интеграла по возможности, независимости, условной возможности и т.д.

Однако теоретико-вероятностная схема для теории возможностей оказывается неоправданно нормативной, поскольку счетно-аддитивная возможность в отличие от вероятности не непрерывна и допускает продолжение с сохранением всех свойств с σ-алгебры измеримых подмножеств на алгебру $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X, а мера $p(\cdot)$ – на класс всех функций, определенных на X и принимающих значения в полукольце $\mathscr{R}$. В работе дана конструкция единственного продолжения возможности на алгебру $\mathscr{P}(X)$, названного максимальным, которая позволяет, в частности, любую возможность охарактеризовать в терминах ее распределения.

Далее в работе рассмотрены методы оптимального оценивания и принятия решения, основанные на минимизации возможности (и/или необходимости) ошибок и потерь соответственно.

Теоретико-возможностные методы, представленные здесь как альтернативные теоретико-вероятностным, существенно отличаются от последних. Прежде всего возможность события в отличие от вероятности, оценивающей частоту его появления в регулярном стохастическом эксперименте, ориентирована скорее на относительную оценку истинности данного события (или его предпочтительности) в сравнении с любым другим событием, причем в ранговой (порядковой) шкале, в которой могут быть представлены лишь отношения "больше", "меньше" или "равно". Можно сказать, что теория возможностей как таковая и теоретико-возможностные методы оптимального оценивания и принятия решений инвариантны относительно любого, сохраняющего порядок, преобразования шкалы значений возможности.

Следовательно, возможность, вообще говоря, не имеет непосредственной (событийной, частотной) интерпретации, свойственной вероятности и связывающей ее с экспериментом. Тем не менее теория возможностей позволяет математически моделировать реальность на основе опытных фактов, знаний, гипотез и суждений исследователей; проверять адекватность построенных моделей и на их основе оптимально оценивать характеристики изучаемых процессов и явлений.

1. Счетно-аддитивная мера со значениями в полукольце

Обозначим $\mathscr{R}_{(p)}$ полукольцо [0,1] с операцией сложения "$+$", понимаемой как "max", и операцией умножения "$\bullet$", понимаемой как "min":

$$a + b = \max(a,b),\quad a \bullet b = \min(a,b),\quad a,b \in [0,1].$$

Так определенные операции коммутативны: $a + b = b + a$, $a \bullet b = b \bullet a$, ассоциативны: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ и взаимно дистрибутивны:

$$a \bullet (b + c) = \min(a, \max(b,c)) = \max(\min(a,b), \min(a,c)) = (a \bullet b) + (a \bullet c); \quad (1)$$

$$a + (b \bullet c) = \max(a, \min(b,c)) = \min(\max(a,b), \max(a,c)) = (a + b) \bullet (a + c); \quad (2)$$

Определим нейтральные элементы **0** и **1** полукольца $\mathscr{R}_{(p)}$, положив **0**=0, **1**=1. При этом

$$\mathbf{0} \bullet a = \min(0,a)=0=\mathbf{0},\quad \mathbf{0} + a = \max(0,a)=a,$$
$$\mathbf{1} \bullet a = \min(1,a)=a,\quad \mathbf{1} + a = \max(a,1)=\mathbf{1},\quad a \in [0,1]. \quad (3)$$

Естественный порядок на $\mathscr{R}_{(p)}$, определяемый неравенством $\leqslant$, согласован с операциями сложения и умножения:

$$a \leqslant b \Rightarrow \begin{cases} a \bullet c \leqslant b \bullet c, \\ a + c \leqslant b + c, \end{cases} \quad a,b,c \in \mathscr{R}_{(p)};\quad \mathbf{0} < \mathbf{1}. \quad (4)$$

Последовательность $\{a_n\} \subset \mathscr{R}_{(p)}$ назовем сходящейся, если $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} a_n = \inf\limits_N \sup\limits_{n\geqslant N} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$, число a назовем ее пределом, $a = \lim a_n$.

Обозначим $\mathscr{L}(X)$ класс функций, определенных на X, со значениями в $\mathscr{R}_{(p)}$, содержащий:

1) вместе с каждой парой функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ их сумму $(f + g)(\cdot)$ и произведение $(f \bullet g)(\cdot)$:

$$\begin{matrix} (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \max(f(x), g(x)), \\ (f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x) = \min(f(x), g(x)), \end{matrix} \quad x \in X; \quad (5)$$

2) вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ ее "отрицание": $\neg f(x) = 1 - f(x)$, $x \in X$;

3) вместе с любой последовательностью функций $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots$

$$\mathop{+}_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x),\quad \mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \inf_n f_n(x),\quad x \in X, \quad (6)$$

и, следовательно, ее верхний $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_N \sup\limits_{n\geqslant N} f_n(x)$ и нижний $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(x)$, $x \in X$, пределы, а также ее предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, если последний существует.

Замечание 1. В условиях 1 и 3 достаточно ограничиться только первыми равенствами, так как для любых функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ из $\mathscr{L}(X) \neg(\neg f + \neg g)(\cdot) = (f \bullet g)(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$, и включение $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathscr{L}(X)$ влечет $\neg(\mathop{+}\limits_{n=1}^{\infty} \neg f_n(\cdot)) = \mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$.

Определение 1. Определим меру $p(\cdot)$ как линейную счетно-аддитивную функцию на $\mathscr{L}(X)$, принимающую значения в $\mathscr{R}_{(p)}$, т.е. такую, что $\forall a,b \in \mathscr{R}_{(p)}$ $\forall f(\cdot), g(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$:

$$p((a \bullet f(\cdot)) + (b \bullet g(\cdot))) = (a \bullet p(f(\cdot))) + (b \bullet p(g(\cdot))) \quad (7)$$

и $\forall \{f_n(\cdot)\} \subset \mathscr{L}(X)$*,

*) Мера $p(\cdot)$ – аналог меры Радона на X.

$$p(\sup_n f_n(\cdot)) = p(\mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty} p(f_n(\cdot)) = \sup_n p(f_n(\cdot)). \quad (8)$$

Пусть $h(x) = \max(f(x), g(x))$, $x \in X$. Согласно условию (7), $p(h(\cdot)) = \max(p(f(\cdot)), p(g(\cdot)))$. Следовательно, если $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in X$, то

$$p(h(\cdot)) = p(f(\cdot)) = \max(p(f(\cdot)), p(g(\cdot))) \geqslant p(g(\cdot)). \quad (9)$$

Можно сказать, что $p(\cdot)$ – монотонно неубывающая функция.

Пусть $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathscr{L}(X)$ – монотонно неубывающая последовательность, т.е. $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, $n = 1,2,\ldots$, $x \in X$. Она поточечно сходится, ее предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x)$, $x \in X$, содержится в $\mathscr{L}(X)$, а условия (8) и (9) фиксируют непрерывность $p(\cdot)$ относительно такой сходимости: $p(f(\cdot)) = p(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)) = p(\sup_n f_n(\cdot)) = \sup_n (p(f_n(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} (p(f_n(\cdot))$. Последнее равенство следует из монотонности $p(\cdot)$ (9).

Поскольку согласно (9) для любого $k \geqslant N$ $p(f_k(\cdot)) \geqslant p(\inf_{n\geqslant N} f_n(\cdot))$, $N=1,2,\ldots$, то

$$\inf_{k\geqslant N} p(f_k(\cdot)) \geqslant p(\inf_{n\geqslant N} f_n(\cdot)),\ N=1,2,\ldots, \quad (10)$$

и, следовательно, в силу (8) и (10)

$$\sup_N p(\inf_{n\geqslant N} f_n(\cdot)) = p(\sup_N \inf_{n\geqslant N} f_n(\cdot)) \equiv$$
$$\equiv p(\lim_{n\to\infty}\inf f_n(\cdot)) \leqslant \sup_N \inf_{n\geqslant N} p(f_n(\cdot)) = \lim_{n\to\infty}\inf p(f_n(\cdot)).$$

В частности, для всякой сходящейся последовательности $f_n(\cdot) \subset \mathscr{L}(X)$, $n=1,2,\ldots$,

$$p(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf p(f_n(\cdot)), \quad (11)$$

т.е. в общем случае $p(\cdot)$ лишь полунепрерывна снизу (относительно поточечной сходимости).

Т е о р е м а 1. *Мера $p(\cdot)$ обладает следующими свойствами.*

1. *Монотонно не убывает на $\mathscr{L}(X)$: если $f(\cdot) \geqslant g(\cdot)$, означает, что $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in X$, то $f(\cdot) \geqslant g(\cdot) \Rightarrow$ $\Rightarrow p(f(\cdot)) \geqslant p(g(\cdot))$.*
2. *Непрерывна относительно сходимости монотонно неубывающей последовательности:* $f_{n+1}(\cdot) \geqslant f_n(\cdot)$, $n=1,2,\ldots \Rightarrow p(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \lim_{n\to\infty} p(f_n(\cdot))$.
3. *Полунепрерывна снизу:* $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathscr{L}(X) \Rightarrow p(\lim_{n\to\infty}\inf f_n(\cdot)) \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf p(f_n(\cdot))$, *если, в частности,* $\{f_n(\cdot)\}$ *сходится, то* $p(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)) \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf p(f_n(\cdot))$*). ■

П р и м е р 1. Используя sup в качестве интеграла, а min в качестве произведения, определим меру $p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot))$ как скалярное произведение фиксированной функции $\varphi(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$ на $f(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$:

$$p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min(f(x), \varphi(x)),\ f(\cdot) \in \mathscr{L}(X). \quad (12)$$

*) Аналоги свойств 2 и 3 в теории интегрирования – теорема Лебега о монотонной сходимости и лемма Фату соответственно.

Здесь $p_\varphi(\cdot)$ – линейная функция, ибо $\forall a,b \in \mathscr{R}_{(p)}$, $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$:

$$p_\varphi((a \bullet f(\cdot)) \boldsymbol{+} ((b \bullet g(\cdot))) =$$
$$= \sup_{x\in X} \min\{\max[\min(a, f(x)),\ \min(b, g(x))], \varphi(x)\} =$$
$$= \max\{\min(a, \sup_{x\in X} \min(f(x), \varphi(x))), \min(b, \sup_{x\in X} \min g(x), \varphi(x)))\} =$$
$$= (a \bullet p_\varphi(f(\cdot))) \boldsymbol{+} (b \bullet p_\varphi(g(\cdot))),$$

и счетно-аддитивная, поскольку $p_\varphi\left(\mathop{\boldsymbol{+}}_{j=1}^{\infty} f_j(x)\right) = \sup_{x\in X} \min(\sup_j f_j(x), \varphi(x)) = \sup_j \sup_{x\in X} \min(f_j(x), \varphi(x)) = \sup_j p_\varphi(f_j(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{j=1}^{\infty} p_\varphi(f_j(\cdot))$.

Вместе с тем $p_\varphi(\lim_{n\to\infty} f_n(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min(\sup_N \inf_{n\geqslant N} f_n(x), \varphi(x)) \leqslant \sup_N \inf_{n\geqslant N} \sup_{x\in X} \min(f_n(x), \varphi(x)) = \lim_{n\to\infty} \inf p_\varphi(f_n(\cdot))$, т.е. мера $p_\varphi(\cdot)$, как и в общем случае $p(\cdot)$, лишь полунепрерывна снизу. ■

Впрочем, далее будет показано, что для должным образом продолженной меры $p(\cdot)$ равенство (12) представляет ее общее выражение.

Заметим, что $p_{\mathop{\boldsymbol{+}}_{j=1}^{\infty}\varphi_j}(f(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{j=1}^{\infty} p_{\varphi_j}(f(\cdot))$, $p_{\mathop{\bullet}_{j=1}^{\infty}}(f(\cdot)) \leqslant \mathop{\bullet}_{j=1}^{\infty} p_{\varphi_j}(f(\cdot))$.

2. Мера возможности: определение и свойства

Пусть $\mathscr{A}$ – некоторый класс подмножеств X, $\mathscr{L}(X)$ – минимальный (по включению) класс функций, содержащий все кусочно-постоянные функции, т.е. функции вида

$$f(x) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n} (c_k \bullet \chi_{A_k}(x)) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \min(c_k, \chi_{A_k}(x)),$$
$$x \in X,\quad A_k \in \mathscr{A},\quad k=1,\ldots,n,\quad n=1,2,\ldots, \quad (13)$$

где $c_k \in [0,1]$, $\chi_{A_k}(\cdot)$ – характеристическая функция (х.ф.) множества $A_k \subset X$: $\chi_{A_k}(x)=1$, если $x \in A_k$, $\chi_{A_k}(x)=0$, если $x \notin A_k$, $A_k \cap A_p = \varnothing$, если $k \neq p$, $k,p=1,2,\ldots,n$, $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $n=1,2,\ldots$. Что касается класса $\mathscr{A}$ множеств $A_1,\ldots,A_n$, $n=1,2,\ldots$, используемых в выражении (13), то он должен быть замкнут относительно всех теоретико-множественных операций. Действительно, поскольку $\mathscr{L}(X)$ содержит х.ф., скажем $\chi_A(\cdot)$, $\chi_B(\cdot)$, то $\mathscr{L}(X)$ содержит $\chi_{A\cup B}(\cdot) = \max(\chi_A(\cdot), \chi_B(\cdot))$, $\chi_{A\cap B}(\cdot) = \min(\chi_A(\cdot), \chi_B(\cdot))$ и $\neg\chi_A(\cdot) = \chi_{X\setminus A}(\cdot)$; следовательно, если $A, B \in \mathscr{A}$, то и $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$ и $X \setminus A \in \mathscr{A}$. Если $\{\chi_{A_n}(\cdot)\} \subset \mathscr{L}(X)$ то $\chi_{\bigcup_n A_n}(\cdot) = \sup_n \chi_{A_n}(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$, $\chi_{\bigcap_n A_n}(\cdot) = \inf_n \chi_{A_n}(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$, и если последовательность $\chi_{A_1}(\cdot), \chi_{A_2}(\cdot),\ldots$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\cdot) = \chi_{\lim_{n\to\infty} A_n}(\cdot) \in \mathscr{L}(X)$, где $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_N \bigcap_{n\geqslant N} A_n = \bigcap_N \bigcup_{n\geqslant N} A_n$, также принадлежит классу $\mathscr{A}$ множеств, который, как следует из указанных его свойств, является σ-алгеброй.

Пусть $\{f_n(\cdot)\}$ – последовательность кусочно-по-

стоянных и тем самым $\mathscr{A}$-измеримых функций. Тогда $\sup_n f_n(\cdot)$, $\inf_n f_n(\cdot)$, $\lim_{n\to\infty}\inf f_n(\cdot)$ и $\lim_{n\to\infty}\sup f_n(\cdot)$ – $\mathscr{A}$-измеримые функции. Если $\{f_n(\cdot)\}$ – последовательность $\mathscr{A}$-измеримых функций, то эти операции приводят вновь к $\mathscr{A}$-измеримым функциям. Чтобы увидеть, что $\mathscr{L}(X)$ – класс $\mathscr{A}$-измеримых функций, определенных на X и принимающих значения в $[0,1]$, осталось заметить, что всякую такую функцию $f(\cdot)$ можно представить в виде предела равномерно сходящейся монотонной последовательности кусочно-постоянных $\mathscr{A}$-измеримых функций. А именно последовательности

$$\underline{f}_n(x) = \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^{(n)} \bullet \chi^{(n)}_{\mathscr{A}_k}(x)\right),\quad n=1,2,\ldots,\quad x\in X,$$
$$\overline{f}_n(x) = \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{n}\left(\alpha_{k-1}^{(n)} \bullet \chi^{(n)}_{\mathscr{A}_k}(x)\right),\quad n=1,2,\ldots,\quad x\in X, \tag{14}$$

равномерно сходятся к $f(x)$, $x\in X$, причем первая – монотонно не убывая, а вторая – монотонно не возрастая, если $A_k^{(n)}=\{x\in X,\ \alpha_k^{(n)}\leqslant f(x)<\alpha_{k-1}^{(n)}\}$, $k=1,2,\ldots,n$, $1=\alpha_0^{(n)}\geqslant\alpha_1^{(n)}\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n^{(n)}=0$, и $\varepsilon^{(n)}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(\alpha_{k-1}^{(n)}-\alpha_k^{(n)})\to 0$ при $n\to\infty$. При этих условиях $\sup_{x\in X}(f(x)-\underline{f}_n(x))\leqslant\varepsilon^{(n)}$, $\sup_{x\in X}(\overline{f}_n(x)-f(x))\leqslant\varepsilon^{(n)}$.

Всякое множество $A\in\mathscr{A}$ называется $\mathscr{A}$-измеримым или событием; последнее можно задать его х.ф. $\chi_A(\cdot)\in\mathscr{L}(X)$. Любая функция $f(\cdot)\in\mathscr{L}(X)$ определяет нечеткое событие (нечеткое множество [8]) и называется его х.ф.*)

О п р е д е л е н и е 2. Величину $P(A)=p(\chi_A(\cdot))$ назовем мерой возможности события $A\in\mathscr{A}$, или, короче, возможностью A. Соответственно величину $p(f(\cdot))$ назовем возможностью нечеткого события, заданного х.ф. $f(\cdot)\in\mathscr{L}(X)$.

Т е о р е м а 2. *Возможность* $P(A)$, $A\in\mathscr{A}$ *обладает следующими свойствами.*

1.

$$P(A\cup B)=p((\chi_A\dot{+}\chi_B)(\cdot))=\max(P(A),P(B)),\quad A,B\in\mathscr{A} \tag{15}$$

и, как следствие, $P(X)=P((X\setminus A)\cup A)=\max(P(X\setminus A), P(A))$, $A\in\mathscr{A}$. *Кроме того,* $P(A)\leqslant P(B)$, *если* $A\subset B$ *(монотонность возможности), и, как следствие,* $P(A\cap B)=p((\chi_A\bullet\chi_B)(\cdot))\leqslant\min(P(A),P(B))$, $A,B\in\mathscr{A}$.

2. Для любой последовательности событий $A_1,A_2,\ldots$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sup_n P(A_n)=\mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty}P(A_n), \tag{16}$$

т.е. возможность $P(\cdot)$ *счетно-аддитивна. Если* $A_1\subset A_2\subset\ldots$ *и* $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$, *то, как следствие счетной аддитивности и монотонности* $P(\cdot)$, *получаем непрерывность* $P(\cdot)$ *относительно такой сходимости:* $P(A)=\sup_n P(A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$.

3. В общем случае если $A=\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_N\bigcap_{n\geqslant N}A_n=\bigcap_N\bigcup_{n\geqslant N}A_n$, *то*

$$P(A)=\sup_N P\left(\bigcap_{n\geqslant N}A_n\right)\leqslant\sup_N\inf_{n\geqslant N}P(A_n)\equiv\lim_{n\to\infty}\inf P(A_n), \tag{17}$$

т.е. $P(\cdot)$ *полунепрерывна снизу. В частности, если* $A_1\supset A_2\supset\ldots$, *то* $A=\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ *и* $P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}P(A_n)$. ■

Заметим, что любые два события $A,B\in\mathscr{A}$ с точки зрения их возможности аналогичны несовместным событиям в теории вероятностей, так как $P(A\cup B)=\max(P(A),P(B))=P(A)\dot{+}P(B)$.

Третье свойство возможности означает, что значение $P(\varnothing)$ нельзя определить по непрерывности, поскольку $P(A)$ не непрерывна при $A=\varnothing$; если $\varnothing=\lim_{n\to\infty}(A_n)$, то $P(\varnothing)\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf P(A_n)$, а при условии $A_1\supset A_2\supset\ldots$ и $A_n\downarrow\varnothing$, $n\to\infty$, получим $P(\varnothing)\leqslant\lim_{n\to\infty}P(A_n)$. Значение $P(\varnothing)$ можно определить как произвольное число из $[0,\inf_{x\in\mathscr{A}}P(A)]$. При этом для любого события A $P(A\cup\varnothing)=\max(P(A),P(\varnothing))=P(A)$, $P(A\cap\varnothing)=\min(P(A),P(\varnothing))=P(\varnothing)$. Далее, если не оговорено противное, полагаем $P(\varnothing)=0$.

С другой стороны, если $X=\lim_{n\to\infty}A_n$, то согласно (17) $P(X)\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf P(A_n)$. В то же время $P(A_n)\leqslant P(X)$, $n=1,2,\ldots$, и потому $P(X)\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup P(A_n)$. Следовательно, для любой сходящейся к X последовательности $A_1,A_2,\ldots$: $P(X)=\lim_{n\to\infty}\inf P(A_n)=\lim_{n\to\infty}\sup P(A_n)$, т.е. последовательность $P(A_1), P(A_2),\ldots$ сходится к $P(X)$, и возможность $P(\cdot)$ непрерывна в X. Естественно определить $P(X)=1$.

Далее любую функцию $P(A)$, $A\in\mathscr{A}$, обладающую свойствами, перечисленными в теореме 2, будем называть возможностью.

Тройку $(X,\mathscr{A},P(\cdot))$ *назовем возможностным пространством.*

П р и м е р 2. Возвращаясь к мере $p(\cdot)=p_\varphi(\cdot)$ (12), заметим, что в этом случае возможность события $A\in\mathscr{A}$, $A\neq\varnothing$, задается равенством

$$P(A)=P_\varphi(A)=\sup_{x\in A}\varphi(x),\quad P(\varnothing)=0.$$

Здесь $\varphi(\cdot)\in\mathscr{L}(X)$, причем $\sup_{x\in X}\varphi(x)=1$. Эту функцию естественно назвать распределением возможности $P(\cdot)$. Далее будет показано, что в любом случае возможность $p(\cdot)$ может быть продолжена на алгебру $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X и задана распределением. ■

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081).

Литература

1. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М., 1979.
2. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М., 1975.
3. *Savage L.J.* The Foundations of Statistics. N.Y., 1972.
4. *Dempster A.P.* //Ann.Math.Statis. 1967. **38**. P.325.
5. *Choquet G.* //Ann. Inst. Fourier. 1953/1954. **5**. P.131.
6. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. Princeton, N.J., 1976.
7. *Zadeh L.A.* //Fuzzy Sets and Systems. 1978. N 1. P. 3.

*) Поскольку $f(\cdot)\in\mathscr{L}(X)$ – характеристическая функция нечеткого подмножества X, $\mathscr{L}(X)$ можно назвать нечеткой σ-алгеброй, $(X,\mathscr{L}(X))$ – нечетким измеримым пространством, элементы $\mathscr{L}(X)$ – нечеткими измеримыми множествами [12].

8. *Zadeh L.A.* //Information and Control. 1965. **8**. P. 235.
9. *Shackle G.L.S.* Decision, Order and Time in Human Affairs. Cambridge (University Press), 1961. 2nd edition.
10. *Pyt'ev Yu.P.* //Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. **3**. N 1. P. 13.
11. *Дюбуа Д.Д., Прад Ф.* Теория возможностей. М., 1990.
12. *Klement E.P.* // Fuzzy Sets and Systems. 1980. **4** .P. 83.

Поступила в редакцию
18.07.96

УДК 539.12.01

ПОЛЯРИЗАЦИЯ В ПРОЦЕССЕ $p\bar{p}\to e\bar{e}$ И КВАЗИЯДЕРНОЕ СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ

В.А.Мещеряков, Г.В.Мещеряков, Чан Куанг Тует

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

Ранее было предположено существование квазиядерного $p\bar{p}$-состояния с малой энергией связи. Обсуждается влияние этого состояния на электромагнитный формфактор протона. Вычислен его вклад в интегральную асимметрию процесса $p\bar{p}\to e\bar{e}$. Показано,что измерение интегральной асимметрии даже вдали от $p\bar{p}$-порога реакции важно для обнаружения квазиядерного состояния.

Эксперименты на установке LEAR в CERN дали богатый материал по $p\bar{p}$-взаимодействию при низких энергиях. Среди множества новых данных можно выделить упругое $p\bar{p}$-рассеяние [1] и процесс $p\bar{p}\to e\bar{e}$ при малых энергиях $p\bar{p}$-системы [2]. В обоих случаях результаты экспериментов с трудом поддаются интерпретации на основе общепринятых моделей. В упругом $p\bar{p}$-рассеянии вперед отношение действительной части амплитуды к мнимой $\rho=\mathrm{Re}T/\mathrm{Im}T$ при импульсах $P_L<1$ ГэВ/c имеет осциллирующий характер. С учетом того, что на пороге реакции $\rho\sim-1$, оно трижды обращается в нуль в указанном интервале импульсов. Такое поведение ρ не могут полно объяснить ни потенциальные модели, ни дисперсионные соотношения [3]. В работах [4] была построена аналитическая модель амплитуды упругого $p\bar{p}$-рассеяния вперед с полюсными слагаемыми, соответствующими связанному состоянию в $p\bar{p}$-системе за счет сильного взаимодействия. Предположение о существовании квазиядерного состояния позволило объяснить эксперимент. В работе [1] из дифференциального сечения процесса аннигиляции $p\bar{p}\to e\bar{e}$ с большой точностью был определен модуль саксовского электромагнитного формфактора протона $|G|$ вблизи $p\bar{p}$-порога [2] на интервале 3,52 ГэВ^2 < s < 4,2 ГэВ^2 (s - мандельстамовская переменная). На этом интервале $|G_E|\simeq|G_M|=|G|$. Было показано, что поведение $|G|$ не совпадает с предсказанием унитаризованной модели векторной доминантности [5] (монотонным убыванием в изучаемом интервале по s). При $s\simeq 4M^2$ (M – масса протона) $|G|$ резко падает, а при $s\sim 4$ ГэВ^2 достигает минимума и даже начинает расти. Не существует общепринятого объяснения этих данных, хотя и были попытки найти им обоснование (см. [6]). Предположение о том, что вблизи $p\bar{p}$-порога упругого рассеяния существует квазиядерное состояние с квантовыми числами $^3S_1$ или $^3D_1$, должно дать вклад в формулу, описывающую поведение электромагнитного формфактора протона в той же области энергий. Такую связь можно усмотреть в условии унитарности формфактора. Общая форма его имеет вид

$$\mathrm{Im}<0\,|\,j_\mu|N\bar{N}>=\sum_n<0\,|\,j_\mu|n><n|T^+|N\bar{N}>, \qquad (1)$$

где j_μ – электромагнитный ток нуклона, а $|n>=|2\pi>,\ldots,|N\bar{N}>$ – полная система допустимых промежуточных состояний. Ясно, что состояние $|N\bar{N}>$ из полной системы $|n>$ дает вклад в мнимую часть формфактора на фоне суммы всех предшествующих по массе состояний из $|n>$. Аппроксимируя в (1) вклады состояний, предшествующих $|N\bar{N}>$-состоянию, δ-функциями, получаем модель векторной доминантности. "Размазывая" тем или иным способом δ-функции в условии унитарности (1), например с помощью равенства

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x}{x^2+\varepsilon},$$

получаем унитаризованные модели. Ниже воспользуемся такой моделью работы [5], так как она приводит, в соответствии с общими принципами, к комплексным значениям саксовских формфакторов протона $G_{M,E}$ при $s>4M^2$ и правильно описывает последние значения формфактора нейтрона [7]. Формулы этой модели имеют вид

$$G_{M,E}(s)=\sum_{k=1}\frac{\varepsilon_k(s),\beta_k(k)}{(s-a_k-\delta_k\sqrt{s_k-s}\,)^2},$$

где $\varepsilon_k(s)=\varepsilon_k^1+\varepsilon_k^0 s$, $\beta_k(s)=\beta_k^1+\beta_k^0 s$, ε_k соответствует G_M, β_k соответствует G_E, k=1,2,3 соответствуют ρ,ω,ϕ-мезонам; массы a_k, ширины δ_k, пороги s_k взяты из эксперимента [8], параметры ε_k^i, β_k^i(кроме $\varepsilon_2^0,\varepsilon_3^0$) найдены по экспериментальным значениям дираковского и паулиевского формфакторов и их производных при s=0, $\varepsilon_2^0,\varepsilon_3^0$ определены нами из χ^2-анализа околопороговых данных работы [9]. Значения параметров даны в таблице. Ранее нами была получена